SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Matematyka jest wiedzą o świecie fizycznym w ujęciu abstrakcyjnym. Istota matematyki tkwi w utożsamianiu obiektów różnej natury, lecz takiej samej struktury. Ta identyfikacja jest zasadniczą barierą na drodze do królestwa matematyki. Ciągi arytmetyczne i geometryczne są tym samym. Analogią jest homomorfizm – pomiar matematyczny. Nie ma królewskiej drogi do matematyki; nie ma ideału, ale dążyć do ideału trzeba – nie należy ustawać w szukaniu prostej i gładkiej drogi do świata nauki. Matematyka konstruuje obiekty idealne, których w naturze nie ma. Nie ma jednej matematyki. Każdy problem naukowy niesie swoją specyficzną matematykę pozwalającą go rozwiązać najprościej. Matematyka – to nie twierdzenia, definicje i zadania, to prawa nauki wzbogacające wiedzę o świecie. Wiemy, jak jest, i na tej podstawie możemy przewidywać, co będzie. Dobrze również posiąść umiejętność tworzenia scenariuszy potrzebnych szczególnie wtedy, gdy nie znamy praw. Podstawą analizy jest algebra liniowa. Matematyka jest przede wszystkim algebrą liniową, a następnie analizą. Kurs algebry poprzedza studium analizy. Analiza matematyczna, czyli rachunek różniczkowy i całkowy, jest zastosowaniem algebry liniowej do badania dynamiki nieliniowej. Analiza jest rozkładem. Każda funkcja racjonalna, czyli taka, która istnieje w świecie fizycznym – ma model naturalny, jest sumą postaci

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots;$$

wszystkie inne funkcje są ludzkim wymysłem. Mamy więc wielomiany, w szczególności funkcje liniowe i formy kwadratowe, funkcje wykładnicze oraz funkcje kołowe – trygonometryczne. Szereg powyższy jest namiastką uniwersalnego prawa Wrońskiego – idei obejmującej wszystko. Podstawą analizy jest twierdzenie Taylora o rozkładzie funkcji na sumę potęg, która jest analogonem szeregu geometrycznego.

Wykład akademicki można zasadnie porównać z tym, co *guide* mówi turystom. Wiedza naukowa jest przekazywalna. Jest to bowiem opis struktur matematycznych – nauka o predykatach i funkcjach zdaniowych. Funkcja zdaniowa ma charakter zdania z wolnymi miejscami; staje się ona zdaniem po wstawieniu na wolne miejsca nazw przedmiotów odpowiedniej kategorii. Słuchacz może wyprzedzać bieg myśli wykładowcy, bo jest tu swoista kolejność wymuszona logiką przedmiotu. Turysta natomiast nie odgadnie myśli przewodnika nawet wtedy, gdy zna trasę wycieczki; opowieść turystyczna jest teatrem. Metoda aksjomatyczna i logika wywodu zastępują nauczyciela. Dobry wykład jest całkowicie prognozowalny, gdy tylko znamy aksjomaty i reguły ich transformacji. Idealny wykład łączy piękno logicznej struktury z walorami aplikacyjnymi. Matematyka zwiększa moment siły i wydajność pracy; to nie modele i teorie, to wiedza o świecie. Postęp dydaktyki jest pochodną postępu nauki. Osiągnięcia trudne dla pokolenia twórców i odkrywców stają się oczywiste i naturalne dla ich wnuków. Nauka, a szczególnie matematyka, wymaga okresowego przeplanowania. Zdobycie nowych terytoriów pozwala z wyższego punktu widzenia spojrzeć na całość i znaleźć przedtem niewidoczne punkty wspólne. Następuje uogólnienie i synteza. Dalekie teorie okazują się izomorficzne, a po utożsamieniu stają się nową prostą i użyteczną wiedzą. Niektóre działy matematyki mają fundamentalne znaczenie dla nauki. Należy do nich niewątpliwie teoria wyznaczników i form różniczkowych, teoria równań algebraicznych oraz szeregów ortogonalnych i równań różniczkowych. Istnieje także wiedza salonowa i matematyka salonowa. Należenie do kręgu wtajemniczonych zawsze nobilituje. Wrocławski matematyk Witold Wolibner widział w teorii wyznaczników szczyt abstrakcji i najtrudniejszy dział algebry. Pewnie coś w tym jest, bo wyznaczniki orientują przestrzeń; przestrzenie wymiaru nieskończonego nie mają orientacji. Bez wyznaczników nie ma form różniczkowych i całek zorientowanych na rozmaitościach.

Matematyka jest podstawą wszystkich nauk i kluczem do nich. Tam, gdzie jest nauka, z konieczności zawsze jest matematyka. Powszechnie matematyka kojarzy się z językiem symbolicznym. Owszem, język symboliczny jest ważną częścią nauki, ale nie stanowi jej istoty, podobnie jak notacja muzyczna ma znikomy wpływ na walory emocjonalne utworu. Zgrabnie dobrana symbolika i adekwatne słownictwo ułatwiają badania i mają zasadniczy wpływ na dydaktykę. Każda nauka jest o czymś, ma podkład w świecie fizycznym; nie ma nauki o niczym. Twierdzenia to prawa nauki – prawidłowości obowiązujące w naturze.

Matematyka w formie abstrakcyjnej ogniskuje w sobie wszystkie konkretne dyscypliny. Twierdzenie matematyczne weryfikuje doświadczenie. Prawo Pitagorasa wykryli budowniczowie. Istotą matematyki wykładu jest piękno formalne, ekonomia myśli oraz głębokie i liczne zastosowania; jest to wiedza klasyczna, trwała i profitująca. Każda decyzja jest pewnym wyważonym poglądem, który w naszej opinii przyniesie największą korzyść. Testator zapisał matce $\frac{1}{3}$ majątku, gdy urodzi syna, i $\frac{2}{3}$, gdy córkę, a resztę przeznaczył mającemu się pojawić potomkowi. Urodziły się bliźnięta: chłopiec i dziewczynka. Jak podzielić majątek pomiędzy matkę i dzieci? Jest to zadanie znane prawnikom starożytnego Rzymu. Jeden z nich – Salvianus – podał rozwiązanie: $\frac{4}{7}$ dla syna, $\frac{2}{7}$ dla matki i $\frac{1}{7}$ dla córki. Jest to rozwiązanie prawnicze. Rozwiązanie matematyczne jest inne: $\frac{1}{3}$dla syna, $\frac{1}{2}$ dla matki i $\frac{1}{6}$ dla córki. Prosta analiza logiczna do tego właśnie wyniku prowadzi jednoznacznie; istotna jest wypukłość. Teoria wypukłości jest niczym innym jak tylko probabilistyką. Problem sprawiedliwego podziału jest zadaniem bardziej matematycznym niż etycznym, moralnym czy prawnym.

Nauka ma kościec matematyczny. Józef Gołuchowski – wybitny, choć zapomniany polski filozof – wywodził wszystkie nauki z tęsknoty do Boga. Myśl ta nieobca była Pitagorejczykom. Uprawianie nauki w szkole pitagorejskiej było tożsame z poświęceniem się służbie Bożej. Nauka oczyszcza i uszlachetnia, podnosi w dostępne nielicznym regiony ducha. Nauka dla pitagorejczyków jest modlitwą, obcowaniem z istotą Najwyższą, jest tajemnicą udzieloną wybranym. Nauka przemawia językiem matematyki. W czasach pitagorejskich matematyka była wszelką wiedzą: muzyką, geometrią, astronomią i arytmetyką. Innej wiedzy niż matematyczna nie było; nie było i nie ma.

W książce są tylko dwa fundamentalne twierdzenia: twierdzenie Taylora o lokalnej aproksymacji funkcji gładkiej wielomianem i twierdzenie Stokesa o równości całki ze strumienia na brzegu rozmaitości całce z pochodnej strumienia na rozmaitości. Godna uwagi, ze względu na wielką użyteczność, jest także metoda badania granic streszczająca się w regule de L'Hospitala. Pierwsza pochodna funkcji mówi o tempie zmiany; jest gradientem prostopadłym do warstwicy, pokazującym kierunek maksymalnego wzrostu funkcji. Druga pochodna reprezentuje w ekonomii inwestycje, a w fizyce przyspieszenie. Naciskamy pedał gazu – samochód jedzie szybciej; inwestujemy – gospodarka przyspiesza. Zdejmujemy nogę z gazu – zwalniamy. Moment przełączenia jest punktem przegięcia. Z jednej strony jest wzrost wypukły – coraz szybszy, z drugiej – wklęsły, zwalniający. Siła bezwładności gwarantuje stabilność i ciągłość zmian. Prawa przyrody wyrażają się równaniami różniczkowymi stopnia drugiego. Naturalnej interpretacji trzeciej pochodnej nie ma. Wykład ogranicza się do różniczkowych równań liniowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach. To wystarcza do zrozumienia empirycznej siły analizy matematycznej i piękna teorii. Niektóre fragmenty powtarzam w różnych miejscach, niekiedy innymi słowami; ma to lepiej oświetlić przedmiot, a ponadto – powtórka jest matką studiów. Analiza matematyczna jest algebraizacją ruchu, bowiem różniczki to prędkości i przyspieszenia – zmienność nieustanna świata tego. Tytuł Elementy matematyki owszem nawiązuje do Bourbakiego abstrakcji, bardziej jednak odnosi się do nauki Euklidesa. Podstawą matematyki jest świat fizyczny, a jego cechą charakterystyczną ścisłość. Wiedza naukowa, czyli matematyka, jest w pełni i jednoznacznie przekazywalna. Cecha ta rodzi struktury abstrakcyjne, szkielety syntaktyczne odarte z ciała semantyki. Prawdy naukowe w swej najogólniejszej abstrakcyjnej postaci są wzorami bez znaczenia i bez interpretacji. Nauka jest algorytmem przekształcającym napisy: słowa transformuje się w inne słowa – dokładnie tak jak pracuje komputer.

Analiza matematyczna jest sztuką linearyzacji funkcji natury dowolnej i teorią form różniczkowych. Linearyzacja jest lokalną aproksymacją funkcją liniową; funkcja styczna optymalnie aproksymuje w sensie lokalnym, czyli w punkcie. Jest to ogólna definicja pochodnej. Pochodna funkcji w punkcie jest funkcją liniową styczną do niej w tym punkcie. Forma liniowa jest pierwszą pochodną funkcji skalarnej, a forma dwuliniowa symetryczna – drugą. Analiza matematyczna jest nauką o rozkładzie funkcji na sumę symetrycznych jednorodnych wielomianów. Ponieważ każdy taki wielomian generuje funkcję wieloliniową, którą można utożsamić z funkcją liniową na produkcie tensorowym, więc analiza bada sumę odpowiednio dobranych funkcji liniowych. Analiza harmoniczna jest analogiczną dyscypliną – rozkłada się funkcje okresowe na sumę harmonik. Uogólnieniem jest rozkład spektralny operatora i pojęcie bazy w przestrzeni liniowej. Formy różniczkowe reprezentują wielowymiarową objętość z uwzględnieniem orientacji. Analiza matematyczna jest rozwinięciem algebry liniowej. Algebra liniowa i analiza matematyczna to spójna i jednolita całość – abstrakcyjna nauka o świecie fizycznym. Analiza – to pochodne i całki. Pochodne informują o tempie zmiany, a całki to wielkości średnie i ceny.

Studentom Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu należą się specjalne podziękowania. Byli oni przez wiele lat poddawani eksperymentom pedagogicznym, gdy autor szukał najprostszej i najkrótszej drogi do istoty matematyki. Jest to poprawiona wersja Podstaw analizy matematycznej, którą w 2007 roku wypuściło Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Dziękuję profesorom Marianowi Matłoce z Poznania i Jerzemu Mice z Katowic za życzliwe recenzje i słowa zachęty. Szczególnie dziękuję pani mgr Elżbiecie Szlachcic za współpracę; ona przygotowała maszynopis i rysunki. Za wszystkie błędy i przeoczenia odpowiada autor.

Wrocław, 18 lutego 2015 roku *Antoni Smoluk*