

## SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA.....	7
Rozdział 1. ORGANON .....	11
Rozdział 2. PREDYKATY I KWANTYFIKATORY .....	23
Rozdział 3. ZBIORY I RELACJE .....	31
Rozdział 4. PREFERENCJE I PORZĄDKI .....	45
Rozdział 5. RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI I ZASADA ABSTRAKCJI.....	61
Rozdział 6. SYSTEMY LICZBOWE: OD KARDYNAŁA DO RADYKAŁA..	71
Rozdział 7. PRZESTRZENIE LINIOWE I WEKTORY .....	89
Rozdział 8. LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ I BAZY.....	103
Rozdział 9. BAZY, OPERATORY LINIOWE, MACIERZE .....	115
Rozdział 10. FORMY WIELOLINIOWE, WYZNACZNIKI I OBJĘTOŚCI .....	137
Rozdział 11. RÓWNANIA LINIOWE .....	151
Rozdział 12. ZMIENNE DECYZYJNE .....	167
Rozdział 13. FORMY KWADRATOWE .....	179
Rozdział 14. ROZKŁAD SPEKTRALNY .....	197
Rozdział 15. PRZESTRZENIE LINIOWE UPORZĄDKOWANE .....	213
LITERATURA POMOCNICZA .....	231
SKOROWIDZ .....	232
INDEKS NAZWISK .....	236
UŻYTE SYMBOLE .....	237

# PRZEDMOWA

*A harvest of light*

1. Kto posiadał matematykę – ma wiedzę uniwersalną, kto opanował algebrę liniową, ten jest również panem matematyki. Algebra liniowa jest nauką o wektorach – wektory to liczby mianowane. Bezwiednie używamy ich codziennie w kilogramach cukru, centymetrach, stopniach Celsjusza i tonach stali. Zbiory wektorów – to przestrzenie liniowe. Algebra liniowa bada właśnie przestrzenie liniowe. Jest to prosta i piękna nauka. Termin *matematyka* – pochodzący z języka greckiego – pierwotnie oznaczał całą naukę. Nie ma nauki o niczym – wiedza ma zawsze substrat w świecie nas otaczającym. Cechą specyficzną matematyki jest formalizm; przyjmuje się pewne napisy symboliczne, słowa w określonym alfabecie jako punkty początkowe, a następnie – stosując określone reguły transformacji – dedukuje się inne słowa. Punkty startowe są aksjomatami teorii, a słowa z nich otrzymane – twierdzeniami. Tak stworzona teoria ma charakter abstrakcyjnej gry w szachy i jest bez treści. Dopiero nadanie nazwom znaczeń wnosi treść do matematyki i czyni z niej naukę o świecie fizycznym. Matematyka jest składnią – syntaksą – w pełni i jednoznacznie przekazywalną. Wiedza intuicyjna nie ma tej własności: odczucia i wyobrażenia mają rysy indywidualne – należą do szeroko rozumianej sztuki. Mogą stać się matematyką, czyli nauką, dopiero po sformalizowaniu. Ma to wpływ na sposób nauczania. Intuicja jest łatwiejsza, lecz nie gwarantuje właściwego odbioru; struktura zapewnia jednoznaczny odbiór, ale uchodzi za rzecz suchą i trudną. W książce są struktury, jest i treść. Dzieło ma charakter podręcznika – dużo przykładów i rozwiązanych zadań – oraz pracy naukowej i mierzy do trzech celów. Po pierwsze, jest to pomoc dydaktyczna, po drugie, narzędzie propagacji kultury naukowej, po trzecie, środek popularyzacji wiedzy i wzrostu kultury powszechnej. Cel pierwszy jest zasadniczy, a dwa dalsze są skutkami dobrej edukacji.

Interpretacja twierdzenia może być prawdą lub fałszem, jest jednak zawsze prawdą, jeśli interpretacja aksjomatów, z których to twierdzenie wyde-

dukowano, jest prawdą. Byty naukowe, pojęcia matematyczne są abstraktami; ich odpowiedniki materialne są z nimi w relacji, którą mamy możliwość zweryfikować tylko w działaniu – empirycznie. Czasem, a jest to bardzo wygodne założenie, przyjmuje się tezę, że jedyną rzeczywistością jest język. W takim razie nie ma problemu relacji pomiędzy myślą i materią – wszystko jest myślą. Prawda jest zgodnością rozumu z samym sobą; sprzeczność niszczy naukę. Aksjomaty ważnych struktur matematycznych – grupy, pierścienia, ciała, przestrzeni liniowej i algebry liniowej – są dobrze osadzone w praktyce. Od czasów Euklidesa metoda aksjomatyczna utorowała sobie szeroką drogę – jest istotą nauki. Królewska droga w nauce jest wybrukowana aksjomatami. Nie ma dedukcji bez aksjomatów. Aksjomaty formułuje się na podstawie doświadczenia. Matematyka jest wiedzą o wszystkim. Ten uniwersalizm osiąga się przez abstrakcję. Matematyka to przede wszystkim dedukcja, ale dedukcja oparta na faktach weryfikowalnych. Matematyka jest więc nauką empiryczną. Dedukcja jest pochodną indukcji. Wcześniej formułowaliśmy prawa indukcyjne uogólniające obserwacje, a następnie – na podstawie tych praw – wnioskujemy. Istotą matematyki jest dedukcja. Dowodzimy, bo nie wiemy. Bóg nie dowodzi, Bóg widzi. Ogląd jest najprostszym i wszystkich przekonującym dowodem.

2. Diagnozy i prognozy to główny cel działalności naukowej. Wiem, aby móc przewidywać. Podstawowy aksjomat całej nauki jest bezpośrednio niemożliwy do weryfikacji; jest to bowiem aksjomat istnienia zbioru nieskończonego – aktualnej nieskończoności. *Istnieje zbiór równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym: część jest równoważna całości.* W przyrodzie takich zbiorów nie ma, a gdyby nawet istniały, to nie mamy możliwości weryfikacji tego. Jednakowoż aksjomat nieskończoności jest dobrze osadzony w rzeczywistości naukowej; wszystkie bowiem spektakularne osiągnięcia nauki są zawsze oparte na tym trudnym i abstrakcyjnym pewniku. Z aksjomatu nieskończoności wynika zasada numerycznego opisu stanów natury. Poznajemy, mierząc, albowiem każdą jakość daje się charakteryzować ciągiem liczb – wektorem w odpowiedniej przestrzeni liniowej. Mosty się nie walą, drapacze chmur stoją, samoloty latają, okręty nie toną, a wszystko to dzięki obliczeniom. Liczby rzeczywiste, funkcje ciągłe i gładkie, całki i pochodne to wektory – konsekwencje aksjomatu nieskończoności. Liczne i piękne zastosowania analizy matematycznej i równań różniczkowych najlepiej potwierdzają aksjomat nieskończoności.

Językiem nauki jest teoria zbiorów – teoria mnogości. Istnieją tylko zbiory. Matematyka jest nauką o zbiorach i relacjach. Zbiór to po prostu własność: cecha, jakość. Własności, którymi operujemy w języku potocznym, są zbiorami. Zbiór, który ma wszystkie własności, jest zbiorem pustym. Jest to abstrakt równie trudny do przyjęcia jak aksjomat nieskończoności. Zbiór pusty nie jest pustą torbą, albowiem toreb, torebek, teczek, sal, pokoi i domów pustych jest wiele; dwie puste teczki są zawsze różnymi obiektami. Zbiór pusty jest tylko jeden, bo zbiór tworzą jego elementy: utożsamia się zbiory o tych samych elementach.

*Qui bene distinguit, bene docet.* Kto dobrze definiuje, ten uczy dobrze; precyzja jest podstawą nauczania matematyki. Preferencja – zwana również praporządkiem – jest relacją zwrotną i przechodnią. Preferencję – podstawową relację ekonomiczną – można interpretować jako relację podzielności w pewnej strukturze algebraicznej. Nauka ekonomii – bardzo konkretny przedmiot – sprowadza się do badania podzielności. Każdy problem rodzi swoistą teorię pozwalającą go rozwiązać. Najpierw jest zadanie; język i narzędzia odpowiednie do jego rozwiązania wynikają z tego zadania – są immanentnie w nim zawarte. Nie dobiera się śruby do klucza, tylko odwrotnie – klucz do śruby.

Użycie języka struktur matematycznych zwiększa precyzję wykładu, cechuje się prostotą i ogólnością, a co najważniejsze – przyczynia się do oszczędności czasowych. O licznych izomorficznych strukturach można mówić tylko raz. Struktury to skale pomiaru, a pomiar jest homomorfizmem. Matematyka jest nauką o pomiarze w szerokim sensie – nauką o izomorfizmach i homomorfizmach. Nauka jest jednością, a fundamentem tej jedności jest matematyka.

**3.** Doskonałości na ziemi nie można osiągnąć; nie należy jednakowoż rezygnować z dążenia do niej. *Co dziś zrobiłeś dobrze, to jutro zrób lepiej.* Doskonałość jest naszym przeznaczeniem. *Bądźcie wy tedy doskonali, jak Ojciec wasz niebieski doskonały jest* (Mat 5.48). Nauka jest metodą – porządek i organizacja przede wszystkim. Zadania rozwiązujemy starannie; szkice i rysunki naprowadzają na właściwą drogę, a także wzmacniają intuicyjne odczucia. Spośród licznych rozwiązań wybieramy te najprostsze i jednocześnie najładniejsze. Studia to ciężka praca, a towarzyszy jej pragnienie osiągnięcia doskonałości. Tylko pierwsze kroki są trudne; każdy następny jest łatwiejszy. Stosunek emocjonalny do przedmiotu ułatwia nau-

## PRZEDMOWA

---

kę. Studia to codzienny wytrwały trening. Siejemy we łzach, by plony nieść w radości. Wiedza jest wartością bezwzględną. To kultura, to metoda, to dźwignia zwiększająca siłę mięśni. Nauka jest bramą do logicznego piękna i porządku.

Synteza i uogólnienie – to istota twórczości naukowej i nauki wykładu; idea ta jest podstawą książki. Synteza i uogólnienie oraz prostota i doskonałość. Kryterium jakości w nauce to piękno. Wyniki piękne łatwo się zapamiętuje; piękno również powszechnie się akceptuje i traktuje jako wynik własny, który był w nas, a wykładowca pomógł tylko w jego wydobyciu i uświadomieniu. Czy ta aprioryczna wiedza pierwotna naprawdę w nas istnieje? Czy są to wspomnienia, reminiscencje z uprzedniego pobytu w platońskim świecie idei? A może naturalność pewnych faktów naukowych i ich powszechna akceptacja dowodzą, że są to właśnie prawa nauki? Może wreszcie struktura naszego umysłu jest taka, że akceptuje wiedzę ostateczną, niepodważalną i z nią współgra?

Celem nauki jest prostota i doskonałość. Nauka nie komplikuje spraw prostych, ale przeciwnie – rozjaśnia prawdy ukryte. Wynik liczy się wtedy, gdy jest piękny i ma swój odpowiednik w świecie fizycznym. Piękno formalne i aplikacje stanowią o istocie nauki. Książka przeznaczona jest dla studentów różnych kierunków, pragnących zrozumieć istotę nauki i matematyki. Skorzystają z niej w szczególności także studenci matematyki oraz nauczyciele szkół wszystkich szczebli. Wierzę, że każdy znajdzie w niej coś ważnego dla siebie. Algebra liniowa jest podstawą.

Jest to poprawiona i zmieniona wersja *Podstaw algebry liniowej* wydanych w 2007 roku przez Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu. Recenzentem pierwodruku, profesorom Marianowi Matłocze z Poznania i Jerzemu Mice z Katowic, dziękuję za trud włożony w rozbiór maszynopisu i dobre uwagi. Komputerową realizację książki przygotowała pani mgr Elżbieta Szlachcic; rysunki są także jej dziełem. Dziękuję za tę pomoc – wzorcową synergię w całej krasie. Błędy obciążają tylko autora.

Wrocław, 15 lutego 2015 roku

*Antoni Smoluk*